解析学概論　課題　解答例

2020.11.09

$\boxed{1}$ 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^3$ により定義するとき，$f(x)$ は全単射であることを示せ.

(解) 単射: 任意に x_1，$x_2\in\mathbb{R}$ を取り，$x_1^3=x_2^3$ とする．このとき，

$$0=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)\,(x_1^2+x_1\,x_2+x_2^2)$$

である．$x_1^2+x_1\,x_2+x_2^2=0$ のときには

$$0=x_1^2+x_1\,x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3\,x_2^2}{4}$$

より $x_1=x_2=0$ であり，$x_1^2+x_1\,x_2+x_2^2\neq 0$ のときには $x_1=x_2$ である．したがって，何れの場合にも $x_1=x_2$ が成り立つので，$f(x)$ は単射である.

全射: 任意に $b\in\mathbb{R}$ を取り，$B=\{x\in\mathbb{R}:x^3\geq b\}$ とおくと，B は空でない下に有界な集合であるから，$s=\inf B$ が存在し，$s^3=b$ をみたす[*1]ことが示せる．（s の存在は実数の連続性による．また，$s^3=b$ の厳密な証明が長くなるので省略する.） ■

[*1] s を $\sqrt[3]{b}$ と表し，b の 3 乗根という.