解析学概論　課題　解答例

2020.10.05

$\boxed{1}$　$\sqrt{2}$ は有理数ではないことを示せ.

(解) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．このとき，互いに素な自然数 n，m を用いて，$\sqrt{2} = n/m$ と表すことができる．$n = \sqrt{2}\,m$ の両辺 2 乗すると，$n^2 = 2\,m^2$ が得られ，この等式から n が 2 の倍数である[*1]．自然数 k を用いて $n = 2\,k$ と表されるので，$m^2 = 2\,k^2$ が得られ，m は 2 の倍数である．以上から，2 は n と m の公約数であり，これは n，m が互いに素であることに反する．したがって，$\sqrt{2}$ が有理数ではない．■

[*1] n を 2 で割ったときの整商を k，余りを ℓ （$\ell \in \{0, 1\}$）とすると，

$$2\,m^2 = n^2 = 2\,(2\,k^2 + 2\,k\,\ell) + \ell^2$$

より $\ell = 0$ でなければならない，つまり，$n = 2\,k$ である．