解析学２　課題　解答例

2020.07.21

問題１　数列 $\{a_n\}$ は，ある実数 α が取れて，すべての自然数 n に対して $a_n \leq \alpha$ をみたすとする．$\{a_n\}$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \alpha$ が成り立つことを示せ．（ヒント：背理法を使う．）

（解） $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta > \alpha$ と仮定する．$\varepsilon = (\beta - \alpha)/2 > 0$ とすると，極限の定義より

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - \beta| < \varepsilon$$

が成り立つ．このとき，

$$\alpha \geq a_{n_0} > \beta - \varepsilon = \beta - \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\beta + \alpha}{2} > \alpha$$

となり矛盾である．したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n = \beta \leq \alpha$ である．■

問題２　数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 1/n$ （$n \in \mathbb{N}$）により定義するとき，$\{a_n\}$ は 1 に収束しないことを示せ．

（解）「$\{a_n\}$ は 1 に収束しない」は，極限の定義より

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \ell \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : m \geq \ell \text{ かつ } |a_m - 1| \geq \varepsilon \tag{E}$$

が成り立つことを示せばよい．

$$|a_n - 1| = 1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N})$$

より，$\varepsilon = 1/2$，$m = \max(\ell, 2)$ とおくと，命題 (E) が成り立つので，$\{a_n\}$ は 1 に収束しない．■

問題３　数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたすとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$$

が成り立つことを示せ．

（解） 任意に $\varepsilon > 0$ を取る．$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より，ある $M > 0$ が取れて，すべての自然数 n に対して $|a_n| \leq M$ であり，命題

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Longrightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．$n \geq n_1$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} |a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n} |a_k| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} M + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{n_1 M}{n} + \frac{n - n_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{n_1 M}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

が得られる．$n > 2\,n_1\,M/\varepsilon$ をみたす自然数 n を n_2 とおくと，$n \geq n_2$ ならば

$$\frac{n_1\,M}{n} \leq \frac{n_1\,M}{n_2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

が得られる．$n_0 = \max(n_1, n_2)$ とおくと，$n \geq n_0$ ならば

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \frac{n_1\,M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となり，示すべき極限が成り立つ．■