解析学２　課題　解答例

2020.07.14

問題１　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ をそれぞれ

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{2\,n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \qquad c_n = \sum_{k=1}^{2\,n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，次の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して $b_n = a_{2\,n} \leq a_{2\,n-1} = c_n$ が成り立つことを示せ．

(2) $\{b_n\}$ は上に有界な単調増加数列であることを示せ．

(3) $\{c_n\}$ は下に有界な単調減少数列であることを示せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ が成り立つことを示せ．

(5) $\{a_n\}$ が収束するか否か調べよ．

（解） 数列の定義より，すべての自然数 n に対して

$$a_{2\,n} - a_{2\,n-1} = \frac{(-1)^{2\,n-1}}{2\,n} = -\frac{1}{2\,n} < 0, \qquad b_n = a_{2\,n}, \qquad c_n = a_{2\,n-1}, \tag{E1}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(-1)^{2\,n+1}}{2\,n+2} + \frac{(-1)^{2\,n}}{2\,n+1} = \frac{1}{(2\,n+2)\,(2\,n+1)} > 0, \tag{E2}$$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{(-1)^{2\,n}}{2\,n+1} + \frac{(-1)^{2\,n-1}}{2\,n} = -\frac{1}{2\,n\,(2\,n+1)} < 0 \tag{E3}$$

が成り立つ．(1) (E1) より，すべての自然数 n に対して $b_n = a_{2\,n} \leq a_{2\,n-1} = c_n$ となる．(2) すべての自然数 n に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{2\,k} \right\} \leq \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{2\,k+1} \right\} = 1 - \frac{1}{2\,n+1} \leq 1$$

が得られる．(E2) より $\{b_n\}$ は上に有界な単調増加数列である．(3) $c_1 = 1 \geq 0$ であり，すべての自然数 $n \geq 2$ に対して

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{2\,k} \right\} + \frac{1}{2\,n-1} \geq \frac{1}{2\,n-1} \geq 0$$

が得られる．(E3) より $\{c_n\}$ は下に有界な単調減少数列である．(4) 問 (2)，(3) より，極限 $\alpha = \lim_{n\to\infty} b_n$，$\beta = \lim_{n\to\infty} c_n$ が存在する．(E1) より

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(c_n - \frac{1}{2\,n} \right) = \beta$$

となる．(5) $n_k = [(k+1)/2]$ とおく．

$$\frac{k+1}{2} - 1 < n_k \leq \frac{k+1}{2}, \qquad \text{つまり，} \quad k = 2\,n_k - 1 \text{ または } k = 2\,n_k$$

と問 (1) より

$$b_{n_k} \leq a_k \leq c_{n_k}, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

が成り立つ．また，$k \to \infty$ のとき $n_k \to \infty$ であるから，

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha, \qquad \lim_{k\to\infty} c_{n_k} = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

が得られ，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つ．したがって，$\{a_n\}$ は収束する． ■