解析学２　課題　解答例

2020.07.07

問題１　ℓ を自然数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\ell}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，次の問に答えよ．

(1) 任意の自然数 ℓ に対して，$\{a_n\}$ は単調増加数列であることを示せ．

(2) $\ell = 1$ のとき，すべての自然数 n に対して $a_{2^n} \geq n/2$ が成り立つことを示せ．

(3) $\ell = 1$ のとき，$\{a_n\}$ は収束するか否か調べよ．

(4) $\ell \geq 2$ のとき，

$$0 \leq a_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(k-1)}, \qquad n = 2, 3, 4, \cdots$$

が成り立つことを示せ．

(5) $\ell \geq 2$ のとき，$\{a_n\}$ は収束するか否か調べよ．

（解） (1) 任意に自然数 ℓ を取る．すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^\ell} > 0$$

が成り立つので，$\{a_n\}$ は単調増加数列である．(2) すべての自然数 n に対して

$$a_{2^n} \geq \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{2^m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{2^m - 2^{m-1}}{2^m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

が成り立つ．(3) 自然数 n に対して $m_n = \max(1, [\log_2 n]) \in \mathbb{N}$ とおくと，任意の自然数 $n \geq 2$ に対して $2^{m_n} \leq n$ が成り立つ．$n \to \infty$ のとき，$m_n \to \infty$ であるから，

$$a_n \geq a_{2^{m_n}} \geq \frac{m_n}{2} \to \infty$$

となり，$\{a_n\}$ は発散する．(4) すべての自然数 n に対して

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\ell} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(k-1)}$$

が成り立つ．(5) 問 (4) より

$$0 \leq a_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

が得られ，$\{a_n\}$ は有界である．$\{a_n\}$ は単調増加でもあるから，$\{a_n\}$ は収束する．■