解析学２　課題　解答例

2020.06.30

問題１　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2\,a_n + 3} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $x = \sqrt{2\,x + 3}$ の実数解 α を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して $1 \leq a_n \leq \alpha$ が成り立つか否かを調べよ．

(3) $\{a_n\}$ は単調増加数列であるか否かを調べよ．

(4) $\{a_n\}$ の極限を調べよ．

（解） (1): $x = \sqrt{2\,x + 3} \geq 0$ を解くと $\alpha = 3$ が得られる．

(2): $n = 1$ のとき明らかに $1 \leq a_1 \leq 3$ である．$1 \leq a_n \leq 3$ と仮定すると，

$$1 \leq \sqrt{2 \cdot 1 + 3} \leq \sqrt{2\,a_n + 3} \leq \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 3$$

より $1 \leq a_{n+1} = \sqrt{2\,a_n + 3} \leq 3$ が得られる．数学的帰納法より，すべての自然数 n に対して $1 \leq a_n \leq 3$ が成り立つ．

(3): 問 (2) より，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2\,a_n + 3} - a_n = \frac{(3 - a_n)\,(a_n + 1)}{\sqrt{2\,a_n + 3} + a_n} \geq 0$$

が成り立つので，$\{a_n\}$ は単調増加数列である．

(4): 問 (2)，(3) より $\{a_n\}$ はある実数 γ に収束するので，

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\,a_n + 3} = \sqrt{2\,\gamma + 3}, \qquad \text{つまり，} \quad \gamma = 3$$

が得られる．したがって，$\{a_n\}$ は 3 に収束する．■

問題２　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n\,(4 - a_n)}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定義するとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するか否か調べよ．

（解） 漸化式より

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n\,(4 - a_n)}{2} - 2 = -\frac{(a_n - 2)^2}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となるので，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = |a_n - 2|$ （$n = 1$，2，3，$\cdots$）により定義すると，$\{b_n\}$ は

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = \frac{b_n^2}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたす．ある自然数 m に対して $b_m = 0$ と仮定する．漸化式より $b_{m-1} = 0$ が得られ，これを帰納的に用いると $b_1 = 0$ となり，$b_1 = 1$ に矛盾である．したがって，すべての自然数 n に対して $b_n > 0$ である．数列 $\{c_n\}$ を $c_n = \log b_n$ （$n = 1$，2，3，$\cdots$）により定義すると，$\{c_n\}$ は

$$c_1 = 0, \qquad c_{n+1} = 2\,c_n - \log 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたす．

$$c_{n+1} - \log 2 = 2\,(c_n - \log 2) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

より $c_n = \log 2 + 2^{n-1}\,(c_1 - \log 2) = \log 2^{1-2^{n-1}}$ となり，$b_n = 2^{1-2^{n-1}}$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - 2| = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 2^{1-2^{n-1}} = 0$$

より $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ が得られる． ■