解析学２　課題　解答例

2020.06.23

問題１　任意の自然数 k，n に対して $2^{-n^2} \leq 2^{k^2-2\,k\,n}$ が成り立つことを示せ．

（解） $-n^2 \leq k^2 - 2\,k\,n$ より $2^{-n^2} \leq 2^{k^2-2\,k\,n}$ が成り立つ．■

問題２　任意の自然数 k に対して，不等式

$$\sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n^2} \leq 2^{1-k^2}$$

が成り立つことを示せ．

（解） 問題１より

$$\sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n^2} \leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{k^2-2\,k\,n} = 2^{-k^2} \sum_{n=k}^{\infty} \left(2^{-2\,k}\right)^{n-k} = 2^{-k^2} \cdot \frac{1}{1-2^{-2\,k}} \leq 2^{-k^2} \cdot \frac{1}{1-2^{-2}} \leq 2^{1-k^2}$$

が得られる．■

問題３　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$ の値を小数第 3 位まで正確に求め，その値の妥当性を示せ．

（解） 問題２より

$$\sum_{n=4}^{\infty} 2^{-n^2} \leq 2^{1-4^2} = 2^{-15} = \frac{1}{32768} < 10^{-4} = 0.0001$$

が得られる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2} > 2^{-1^2} + 2^{-2^2} + 2^{-3^2} = \frac{289}{512} = 0.564453125$$

より

$$0.564453125 < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2} = 0.564453125 + \sum_{n=4}^{\infty} 2^{-n^2} < 0.564453125 + 0.0001 = 0.564553125$$

が得られるので，求める値は 0.564 である．■

問題４　極限の定義に従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4\,n-3}{2\,n-1} = 2$ が成り立つことを示せ．

（解） すべての自然数 n に対して

$$\left|\frac{4\,n-3}{2\,n-1} - 2\right| = \frac{1}{2\,n-1}$$

であることに注意したい．任意に $\varepsilon > 0$ を取り，

$$n_0 = \max\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right], 0\right\} + 1$$

とおく．

$$\frac{1}{2\,n_0 - 1} < \varepsilon$$

であるから，すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$\left|\frac{4\,n-3}{2\,n-1} - 2\right| = \frac{1}{2\,n-1} \leq \frac{1}{2\,n_0 - 1} < \varepsilon$$

となる．したがって，示すべき等式が成り立つ．■

問題 5　極限の定義に従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3\,n+1} - n\right) = \frac{3}{2}$ が成り立つことを示せ．

（解） すべての自然数 n に対して

$$\left|\left(\sqrt{n^2+3\,n+1} - n\right) - \frac{3}{2}\right| = \frac{5/4}{\sqrt{n^2+3\,n+1} + n + 3/2} \leq \frac{5/4}{\sqrt{(n+1)^2} + n + 3/2} = \frac{5}{8\,n+10}$$

が成り立つことに注意したい．任意に $\varepsilon > 0$ を取り，

$$n_0 = \max\left\{\left[\frac{1}{8}\left(\frac{5}{\varepsilon}-10\right)\right], 0\right\} + 1$$

とおく．

$$\frac{5}{8\,n_0 + 10} < \varepsilon$$

であるから，すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$\left|\left(\sqrt{n^2+3\,n+1} - n\right) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{5}{8\,n+10} \leq \frac{5}{8\,n_0+10} < \varepsilon$$

となる．したがって，示すべき等式が成り立つ．■