解析学２　課題　解答例

2020.06.16

問題１　自然数 ℓ に対して，不等式

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<10^{-\ell}$$

をみたす最小の自然数 n を求めよ．

（解） 与えられた不等式より

$$\frac{1}{10^{\ell}}=10^{-\ell}>\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$$

となるので，$10^{\ell}<n+1$ である．したがって，求める自然数 n は 10^{ℓ} である．■

問題２　正数 ε に対して，不等式

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

をみたす最小の自然数 n を求めよ．

（解） 実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ と表すと，$[x]\leq x<[x]+1$ が成り立つことに注意したい．与えられた不等式より

$$\varepsilon>\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1},\qquad \text{つまり，} n>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

となるので，求める自然数 n は

$$\max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right],1\right\}$$

である．■

問題３　自然数 ℓ に対して，不等式

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}-1\right|<10^{-\ell}$$

をみたす最小の自然数 n を求めよ．

（解） 与えられた不等式から

$$0\leq 1-10^{-\ell}<\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}<1$$

が得られる．2 乗すると

$$1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}>(1-10^{-\ell})^2=1-\frac{2\cdot 10^{\ell}-1}{10^{2\,\ell}}$$

となるので，

$$n > \frac{10^{2\ell}}{2\cdot 10^\ell - 1} - 1 = \frac{10^\ell}{2} - \frac{3\cdot 10^\ell - 2}{4\cdot 10^\ell - 2}, \qquad 0 < \frac{3\cdot 10^\ell - 2}{4\cdot 10^\ell - 2} < 1$$

より，求める自然数 n は $10^\ell/2$ である． ■

問題4　正数 ε に対して $10^{-\ell} < \varepsilon$ をみたす自然数 ℓ が存在することを示せ．

（解） 不等式 $10^{-\ell} < \varepsilon$ を ℓ について解くと $\ell > -\log_{10}\varepsilon$ であり，

$$-[\log_{10}\varepsilon] \geq -\log_{10}\varepsilon > -[\log_{10}\varepsilon] - 1$$

が成り立つことに注意したい．自然数 ℓ を

$$\ell = \max(-[\log_{10}\varepsilon], 0) + 1$$

と取ると，

$$10^{-\ell} \leq 10^{-(-[\log_{10}\varepsilon]+1)} < 10^{\log_{10}\varepsilon - 1} = \frac{\varepsilon}{10} < \varepsilon$$

が成り立つ． ■

問題5　任意の正数 ε に対して，不等式

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - 1\right| < \varepsilon$$

をみたす自然数 n が存在することを示せ．

（解） $\varepsilon > 0$ を任意に取る．問題4より $10^{-\ell} < \varepsilon$ をみたす自然数 ℓ が存在し，問題3より $n = 10^\ell/2$ は

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - 1\right| < 10^{-\ell} < \varepsilon$$

をみたす． ■