

## 解析学2 課題 (6月9日)

問題1 関数  $f(x) = |x|$  は  $\mathbb{R}$  上で一様連続であるか否か調べよ.

(解) 任意に  $\varepsilon > 0$  を取り,  $\delta = \varepsilon$  とおくと,  $|x - y| < \delta$  をみたすすべての  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して, 三角不等式より

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y| < \delta = \varepsilon$$

が成り立つので,  $f(x)$  は  $\mathbb{R}$  上で一様連続である. ■

問題2  $M > 0$  を任意に取る. 関数  $f(x) = x^2$  は  $I = (-M, M)$  上で一様連続であるか否か調べよ.

(解) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $\delta = \varepsilon/(2M)$  とおくと,  $|x - y| < \delta$  をみたすすべての  $x, y \in I$  に対して

$$|f(x) - f(y)| = |(x - y)(x + y)| \leq |x - y| (|x| + |y|) < \delta (M + M) = \varepsilon$$

が成り立つので,  $f(x)$  は  $I$  上で一様連続である. ■