解析学２　課題（6 月 2 日）

問題１ p，$q \in \mathbb{R}$ とする．定義に従って，関数 $f(x) = x^2 + p\,x + q$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ．

(解) $a \in \mathbb{R}$ を任意に取る．$|x - a| < 1$ をみたす $x \in \mathbb{R}$ に対して，三角不等式より

$$|x| - |a| \leq |x - a| < 1$$

が成り立つので，$|x| < |a| + 1$ が得られる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2\,(|a|+1) + |p|}\right\}$$

と取る．$0 < |x - a| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |(x-a)\,(x+a+p)| = |x-a|\;|x+a+p| \\ &\leq \delta\,(|x| + |a| + |p|) \leq \frac{\varepsilon}{2\,(|a|+1)+|p|} \cdot (2\;|a| + 1 + |p|) < \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．関数 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続である．■

問題２ ネイピア数

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

を用いて，

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

が成り立つことを示せ．（注意: ネイピア数における n は自然数であり，調べる極限における x は実数である．）

(解) $x \in \mathbb{R}$ に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ と表すと，$[x] \leq x < [x] + 1$ である．$x \geq 1$ に対して

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

が成り立つ．また，$x \to +\infty$ のとき $m = [x] \to \infty$，$n = [x] + 1 \to \infty$ であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}\right\} = e, \\ \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} &= \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{m\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)\right\} = e\end{aligned}$$

が得られる．はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

である．■