解析学２　課題（5 月 26 日）

問題１ $a \geq 1$ に対して

$$1 \leq \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

が成り立つことを示せ．また，$a > 0$ に対して極限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ を調べよ．（ヒント: 二項定理を使って，$\sqrt[n]{a}$ を評価する．）

(解) （前半）: $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$ とおくと，$a \geq 1$ より $a_n \geq 0$ （$n \in \mathbb{N}$）であり，二項定理より

$$a = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\,(a_n)^k > {}_nC_1\,a_n = n\,a_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

が得られる．つまり，$a_n < a/n$ であるから，示すべき不等式が成り立つ．

（後半）: はさみうちの原理と $\lim_{n\to\infty} a/n = 0$ より，$a \geq 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ が得られる．$0 < a < 1$ のときには $b = a^{-1} > 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1$$

であるから，$a > 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ が成り立つ．■

問題２ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

により定義するとき，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

を求めよ．

(解) 方程式 $x^2 = x + 1$ の解は

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

であり，$\alpha + \beta = 1$，$\alpha\,\beta = -1$，$-\beta < \alpha < 0 < \beta$ をみたす．漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+2} - \alpha\,a_{n+1} &= \{(\alpha + \beta)\,a_{n+1} - \alpha\,\beta\,a_n\} - \alpha\,a_{n+1} = \beta\,(a_{n+1} - \alpha\,a_n), \\ a_{n+2} - \beta\,a_{n+1} &= \{(\alpha + \beta)\,a_{n+1} - \alpha\,\beta\,a_n\} - \beta\,a_{n+1} = \alpha\,(a_{n+1} - \beta\,a_n), \qquad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

であるから，

$$a_{n+1} - \alpha\,a_n = \beta^{n-1}\,(a_2 - \alpha\,a_1) = \beta^n, \qquad a_{n+1} - \beta\,a_n = \alpha^{n-1}\,(a_2 - \beta\,a_1) = \alpha^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

が得られ，

$$a_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

となる．$\gamma = \alpha/\beta$ とおくと，$|\gamma| < 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta^n - \alpha^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta - \alpha\,\gamma^n}{1 - \gamma^n} = \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

となる．■