# 解析学２　課題（5 月 19 日）

**問題１** $a>0$，$\gamma\in(0,1)$ とし，数列 $\{a_n\}$ を $a_n=a\,\gamma^n$ （$n\in\mathbb{N}$）により定めるとき，基本列の定義に従って，$\{a_n\}$ が基本列であるか否か調べよ．

**(解)** 任意の $n$，$m\in\mathbb{N}$ に対して，$\ell=\min(n,m)$ とおくと，$n\geq\ell$，$m\geq\ell$ より

$$|a_n-a_m|=\left|a\,\gamma^\ell\,\left(\gamma^{n-\ell}-\gamma^{m-\ell}\right)\right|\leq a\,\gamma^\ell\,\left(\gamma^{n-\ell}+\gamma^{m-\ell}\right)\leq 2\,a\,\gamma^\ell$$

となる．任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$2\,a\,\gamma^{n_0}<\varepsilon,\qquad \text{つまり，}\quad n_0>\frac{\log\varepsilon-\log(2\,a)}{\log\gamma}$$

をみたすように $n_0\in\mathbb{N}$ を取ると，すべての自然数 $n$，$m\geq n_0$ に対して

$$|a_n-a_m|\leq 2\,a\,\gamma^{\min(n,m)}\leq 2\,a\,\gamma^{n_0}<\varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$\{a_n\}$ は基本列である．■

**問題２** 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\sqrt{n}$ （$n\in\mathbb{N}$）により定義する．このとき，命題

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}: n\geq n_0 \Longrightarrow |a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$$

が成り立つことを示せ．また，$\{a_n\}$ が基本列であるか否か調べよ．

**(解)** （前半）: 任意に $\varepsilon>0$ に対して，$n_0\in\mathbb{N}$ を

$$n_0>\frac{1}{4\,\varepsilon^2}$$

をみたすように取る．すべての自然数 $n\geq n_0$ に対して

$$|a_{n+1}-a_n|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}\leq\frac{1}{2\sqrt{n_0}}<\varepsilon$$

が成り立つ．

（後半）: $\varepsilon=1$ とし，すべての $n_0\in\mathbb{N}$ に対して $n=4\,n_0$，$m=n_0$ とおくと，$n$，$m\geq n_0$ であり，

$$|a_n-a_m|=\sqrt{4\,n_0}-\sqrt{n_0}=\sqrt{n_0}\geq 1=\varepsilon$$

となる．つまり，命題

$$\exists\varepsilon>0\ \forall n_0\in\mathbb{N}\ \exists n,m\in\mathbb{N}: n,m\geq n_0\ \text{かつ}\ |a_n-a_m|\geq\varepsilon$$

が成り立つ．上記は $\{a_n\}$ が基本列であることの否定命題であるから，$\{a_n\}$ は基本列ではない．■