解析学２　課題（4 月 28 日）

問題１ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{2}{3}, \qquad a_{n+2} = \frac{6\,a_{n+1} - a_n}{9} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定義するとき，一般項 a_n を求めよ．

(解) 漸化式より，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$3\,a_{n+1} - a_n = \frac{3\,a_n - a_{n-1}}{3} = \frac{3\,a_{n-1} - a_{n-2}}{3^2} = \cdots = \frac{3\,a_2 - a_1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1}}$$

が成り立つ．両辺に 3^{n-1} を掛け，$b_n = 3^{n-1}\,a_n$ とおくと，$b_1 = a_1 = 1$，

$$b_{n+1} - b_n = 3^{n-1}\,(3\,a_{n+1} - a_n) = 3^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

より $b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$ であるから，一般項 a_n は $a_n = n \cdot 3^{1-n}$ となる．■

問題２ すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $2^{n-1} \geq n$ が成り立つことを示せ．

(解) $n = 1$ のときには $2^{1-1} = 1$ より示すべき不等式が成り立つ．$n \geq 2$ のときには，二項定理より

$$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k \geq \sum_{k=0}^{1} {}_{n-1}C_k = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 = 1 + (n-1) = n$$

である．■

問題３ 数列 $\{a_n\}$ は問題 1 で与えられるものとし，$\varepsilon > 0$ を任意に取る．すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ をみたす自然数 n_0 が存在するか否か調べよ．n_0 が存在する場合には，n_0 の例を示せ．

(解) 問題 1 と問題 2 より

$$|a_n| = a_n = \frac{n}{3^{n-1}} \leq \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

が得られる．

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < \varepsilon, \qquad \text{つまり，} \quad n > \frac{\log \varepsilon}{\log(2/3)} + 1$$

をみたす自然数 n を n_0 とおく．すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$|a_n| = a_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0-1} < \varepsilon$$

となる．■