解析学２　課題（4 月 21 日）

問題１ $\mathbb{Q}$ の部分集合 A，B を

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \le 0 \text{ または } x^2 \le 3\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : x \ge 0 \text{ かつ } x^2 \ge 3\}$$

で定義するとき，対 (A, B) は $\mathbb{Q}$ の切断であるか否かを調べよ．

(解) 第 1 回問題 3 より $x^2 = 3$ をみたす有理数は存在しないことに注意したい．

(D1): $-1 \in A$，$2 \in B$ より $A \ne \varnothing$，$B \ne \varnothing$ であり，

$$A \cup B = \mathbb{Q}, \qquad A \cap B = \{x \in \mathbb{Q} : x \ge 0 \text{ かつ } x^2 = 3\} = \varnothing$$

が成り立つ．

(D2): $a \in A$，$b \in B$ を任意に取る．(a) $a < 0$ のとき $a < 0 \le b$ である．(b) $a \ge 0$ のとき，$a^2 < 3 < b^2$ より $0 < b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$ が得られ，$a + b \ge 0$ より $a < b$ となる．したがって，何れの場合にも $a < b$ が成り立つ．

以上から，(A, B) は $\mathbb{Q}$ の切断である．■

問題２ $\mathbb{R}$ の部分集合 A，B を

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \le 0 \text{ または } x^2 \le 3\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0 \text{ かつ } x^2 \ge 3\}$$

で定義するとき，対 (A, B) は $\mathbb{R}$ の切断であるか否かを調べよ．

(解) $0 \le x < 1$ ならば，$x^2 < 1$ より $x^2 - 3 < -2$ である．したがって，すべての $x \in B$ に対して $x \ge 1$ が成り立ち，B は下に有界である．実数の連続性により $1 \le s = \inf B \in \mathbb{R}$ が存在する．

$$h = \min\left\{ \frac{|s^2 - 3|}{2\,(2\,s + 1)}, \frac{s}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

とおく．$s^2 > 3$ ならば，すべての $0 \le \delta \le h$ に対して $s - \delta \ge 0$,

$$(s - \delta)^2 - 3 > s^2 - 3 - (2\,s + 1)\,h \ge s^2 - 3 - (2\,s + 1) \cdot \frac{|s^2 - 3|}{2\,(2\,s + 1)} = \frac{s^2 - 3}{2} > 0$$

より $s - \delta \in B$ であるから，$s = \inf B$ であることに反する．また，$s^2 < 3$ ならば，すべての $0 \le \delta \le h$ に対して

$$(s + \delta)^2 - 3 < s^2 - 3 + (2\,s + 1)\,h \le s^2 - 3 + (2\,s + 1) \cdot \frac{|s^2 - 3|}{2\,(2\,s + 1)} = -\frac{3 - s^2}{2} < 0$$

より $s + \delta \notin B$ であるから，$s = \inf B$ であることに反する．以上から，$s^2 = 3$ が成り立つ．$\varnothing \ne \{s\} \subset A \cap B$ となるので，(A, B) は $\mathbb{R}$ の切断ではない．■

問題３ 集合 B は問題 1 で与えられる $\mathbb{Q}$ の部分集合 B とする．$\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Q}$ への関数

$$f(x) = \frac{2\,x + 3}{x + 2}$$

について，$f(B) \subset B$ が成り立つか否かを調べよ．また，成り立つ場合には，集合 B の最小値が存在するか否かを調べよ．

(解) 任意の $x \in B$ に対して

$$0 < f(x) \in \mathbb{Q}, \qquad f(x) - x = \frac{3 - x^2}{x + 2} < 0, \qquad \{f(x)\}^2 - 3 = \frac{x^2 - 3}{(x+2)^2} > 0$$

が成り立つので，$f(x) \in B$ である．したがって，$f(B) \subset B$ である．

$s = \min B$ が存在すると仮定する．$s \in B$ より $s > f(s) \in B$ が得られ，s が B の最小元であることに反する．したがって，B の最小元は存在しない． ■