解析学２　課題（4 月 14 日）

問題１ 学習資料 2 ページ（ページ番号 3）における $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ の部分集合 $[n, m]$ がどのような集合なのか調べよ．

(解) $\mathbb{N}_0$ は全順序集合だから，(a) $n > m$，(b) $n = m$，(c) $n < m$ のいずれか一つが成り立つ．(a) および (b) の場合には，自然数の順序関係の定義より，ある $s \in \mathbb{N}_0$ が存在して $n = m + s$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}(k, \ell) \sim (n, m) &\Longleftrightarrow k + m = \ell + n \Longleftrightarrow k + m = \ell + (m + s) \\ &\Longleftrightarrow k = \ell + s \Longleftrightarrow (k, \ell) \sim (s, 0)\end{aligned}$$

より $[n, m] = [s, 0] = \{(k, \ell) : k = \ell + s,\ \ell \in \mathbb{N}_0\}$ と表せる．(c) の場合には，自然数の順序関係の定義より，ある $s \in \mathbb{N}$ が存在して $m = n + s$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}(k, \ell) \sim (n, m) &\Longleftrightarrow k + m = \ell + n \Longleftrightarrow k + (n + s) = \ell + n \\ &\Longleftrightarrow k + s = \ell \Longleftrightarrow (k, \ell) \sim (0, s)\end{aligned}$$

より $[n, m] = [0, s] = \{(k, \ell) : \ell = k + s,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ と表せる． ■

問題２ 学習資料 2 ページ（ページ番号 3）における $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の部分集合 $\langle n, m \rangle$ がどのような集合なのか調べよ．

(解) n と m の最大公約数を $d = \gcd(n, m) \in \mathbb{N}$ とすると，$n = s\,d$，$m = t\,d$ と表せ，$(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ である．$u \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}(k, \ell) \approx (n, m) &\Longleftrightarrow k \cdot m = \ell \cdot n \Longleftrightarrow k \cdot (t \cdot d) = \ell \cdot (s \cdot d) \\ &\Longleftrightarrow k \cdot t = \ell \cdot s \Longleftrightarrow (k, \ell) \approx (s, t) \\ &\Longleftrightarrow k \cdot (t \cdot u) = \ell \cdot (s \cdot u) \Longleftrightarrow (k, \ell) \approx (s \cdot u, t \cdot u)\end{aligned}$$

より $\langle n, m \rangle = \langle s, t \rangle = \{(k, \ell) : k = s \cdot u,\ \ell = t \cdot u,\ u \in \mathbb{N}\}$ と表せる． ■

問題３ 方程式 $x^2 = 3$ をみたす解は有理数でないことを示せ．

(解) 方程式 $x^2 = 3$ の解 x が有理数であると仮定する．このとき，互いに素な $p \in \mathbb{Z}$，$q = \mathbb{N}$（$\gcd(p, q) = 1$）を用いて，$x = p/q$ と表せ，$p^2 = 3 \cdot q^2$ が得られる．p を 3 で割ったときの商を $s \in \mathbb{Z}$，余りを $t \in \{0, 1, 2\}$ とすると，

$$3 \cdot q^2 = p^2 = (3 \cdot s + t)^2 = 3 \cdot (3 \cdot s^2 + 2 \cdot s \cdot t) + t^2$$

より $t = 0$ でなければならない．$p = 3 \cdot s$ より $q^2 = 3 \cdot s^2$ が得られ，同様に，ある $u \in \mathbb{N}$ が存在し $q = 3 \cdot u$ と表せるので，$\gcd(p, q) \geq 3$ となる．これは p と q が互いに素であることに反する．したがって，方程式 $x^2 = 3$ の解は有理数ではない． ■