

■ 二項関係  $\sim^R$  は集合  $X$  上の同値関係とする。このとき、任意の  $a, b \in X$  に対して、命題

$$a \not\sim^R b \implies C(a) \cap C(b) = \emptyset$$

が成り立つことを示せ。ここで、 $C(a)$  は  $a$  を代表元とする同値関係  $\sim^R$  に関する同値類である。

(解) 背理法で示す。ある  $a, b \in X$  に対して  $a \not\sim^R b$  かつ  $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$  が成り立つと仮定する。このとき、 $c \in C(a) \cap C(b)$  をみたま  $c \in X$  が取れるので、 $c \in C(a)$  かつ  $c \in C(b)$  が成り立ち、 $c \sim^R a$ 、 $c \sim^R b$  となる。同値関係の定義より  $a \sim^R b$  が成り立つ。これは  $a \not\sim^R b$  に矛盾する。したがって、示すべき命題が成り立つ。 ■