解析学概論　解答例

2019.11.12

■　区間 $[0,1]$ から区間 $[0,1)$ への全単射を作れ．

（解）$0<r<1$ を任意に取り固定する．

$$R_0=\{r^n : n\in\mathbb{Z}, n\geq 0\},\qquad R_1=\{r^n : n\in\mathbb{Z}, n>0\},\qquad R_2=[0,1]\setminus R_0$$

とおくと，

$$[0,1]=R_0\cup R_2,\qquad R_0\cap R_2=\varnothing,\qquad [0,1)=R_1\cup R_2,\qquad R_1\cap R_2=\varnothing$$

である．関数 $f:[0,1]\to[0,1)$，$g:[0,1)\to[0,1]$ を

$$f(x)=\begin{cases} r\,x\in R_1 & (x\in R_0)\\ x\in R_2 & (x\in R_2)\end{cases}$$
$$g(x)=\begin{cases} r^{-1}\,x\in R_0 & (x\in R_1)\\ x\in R_2 & (x\in R_2)\end{cases}$$

により定義すると，

$$\begin{aligned}
x\in R_0 \text{ のとき}\quad g(f(x)) &= g(r\,x)=r^{-1}\,(r\,x)=x,\\
x\in R_2 \text{ のとき}\quad g(f(x)) &= g(x)=x,\\
x\in R_1 \text{ のとき}\quad f(g(x)) &= f(r^{-1}\,x)=r\,(r^{-1}\,x)=x,\\
x\in R_2 \text{ のとき}\quad f(g(x)) &= f(x)=x
\end{aligned}$$

であるから，$g\circ f=id_{[0,1]}$，$f\circ g=id_{[0,1)}$ が成り立つ．したがって，f は全単射である．■