

■ 関数 $f(x, y) = \log_y x$ について, $f(x, y)$ が定義できる $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の範囲のうち, 最大の範囲 D を求めよ. また, 不等式 $\log_y x \leq 1/2$ をみたす $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の範囲を求めよ.

(解) 最大の範囲 D は

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y \neq 1\}$$

である. また,

$$\log_y y = 1 \geq 2 \log_y x = \log_y x^2$$

より, (a) $0 < y < 1$ のときには $y \leq x^2$, (b) $y > 1$ のときには $y \geq x^2$ である. したがって, 不等式 $\log_y x \leq 1/2$ をみたす $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の範囲は

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2, 0 < y < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y > 1\}$$

となる. ■