解析学概論　解答例

2019.10.21

■　$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，次の命題関数を定義する．

$$\begin{aligned} &P(x,y) : |x| + |y| \leq 1, &&Q(x,y) : x + y \leq 1, \\ &R(x,y) : |x|^2 + |y|^2 \leq 1, &&S(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, \\ &T(x,y) : |x|^3 + |y|^3 \leq 1, &&U(x,y) : x^3 + y^3 \leq 1. \end{aligned}$$

上記の命題関数から，命題 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : R(x,y) \Longrightarrow \boxed{}$ が成り立つ命題関数 $\boxed{}$ を選び，その理由を述べよ．

（解）　命題関数 $P(x,y)$ および $Q(x,y)$ について： $a = b = 1/\sqrt{2}$ とすると，$|a|^2 + |b|^2 = 1$ より $P(a,b)$ は真であるが，$|a| + |b| = \sqrt{2} > 1$，$a + b = \sqrt{2} > 1$ より $P(a,b)$ および $Q(a,b)$ は偽である．命題 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : R(x,y) \Longrightarrow P(x,y)$ および $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : R(x,y) \Longrightarrow Q(x,y)$ は成り立たない．

命題関数 $R(x,y)$ および $S(x,y)$ について： 任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して $z^2 = |z|^2$ であるから，任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $R(x,y) \equiv S(x,y)$ である．したがって，命題 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : R(x,y) \Longrightarrow R(x,y)$ および $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : R(x,y) \Longrightarrow S(x,y)$ が成り立つことは明らかである．

命題関数 $T(x,y)$ および $U(x,y)$ について： $|a|^2 + |b|^2 \leq 1$ ならば，$|a| \leq 1$，$|b| \leq 1$ であるから，

$$|a|^3 + |b|^3 = |a|^2 \cdot |a| + |b|^2 \cdot |b| \leq |a|^2 \cdot 1 + |b|^2 \cdot 1 = |a|^2 + |b|^2 \leq 1$$

となり，命題 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : R(x,y) \Longrightarrow T(x,y)$ が成り立つ．また，任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して，$z \leq |z|$ より $z^3 \leq |z|^3$ であることに注意すると，

$$|a|^2 + |b|^2 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |a|^3 + |b|^3 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad a^3 + b^3 \leq 1$$

が成り立つので，命題 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : R(x,y) \Longrightarrow U(x,y)$ が成り立つ．■