解析学１　課題　解答例

2020.12.22

$\boxed{1}$　a，b，c を実定数とし，$a^2+b^2>0$ をみたすものとする．条件 $g(x,y)=a\,x+b\,y+c=0$ のもとで，関数 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ の最小値を求めよ．

(解) 関数 $h(x,y,\lambda)$ を $h(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\,g(x,y)$ とおき，ラグランジェの未定係数法を適用する．連立方程式

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,\lambda)=2\,x-\lambda\,a,\\ 0&=\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,\lambda)=2\,y-\lambda\,b,\\ 0&=\frac{\partial h}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=-(a\,x+b\,y+c)\end{aligned}$$

の解は $(x,y,\lambda)=(x_0,y_0,\lambda_0)$ である．ここで，

$$x_0=-\frac{a\,c}{a^2+b^2},\qquad y_0=-\frac{b\,c}{a^2+b^2},\qquad \lambda_0=-\frac{2\,c}{a^2+b^2}$$

である．$g(x,y)=0$ のもとで

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\frac{c^2}{a^2+b^2}=x^2+y^2+\frac{2\,c\,(a\,x+b\,y+c)}{a^2+b^2}=x^2+y^2=f(x,y)$$

が成り立つので，$f(x,y)$ は $(x,y)=(x_0,y_0)$ で最小値 $c^2/(a^2+b^2)$ をとる．■