解析学１　課題　解答例

2020.12.15

$\boxed{1}$　h，k，A，B，C を実数とし，ベクトル $\boldsymbol{h}$，行列 M をそれぞれ

$$\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

により定義するとき，(1) $\boldsymbol{h}^T A\,\boldsymbol{h}$ を計算せよ．また，(2) M の固有値の符号と係数 A，B，C の関係を調べよ．

(解) (1) 行列の積の定義より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}^T A\,\boldsymbol{h} &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\,h + B\,k \\ B\,h + C\,k \end{pmatrix} \\ &= h\,(A\,h + B\,k) + k\,(B\,h + C\,k) = A\,h^2 + 2\,B\,h\,k + C\,k^2 \end{aligned}$$

である．(2) M の固有値 λ は特性方程式

$$\begin{aligned} 0 =& \Phi(\lambda) = \det(M - \lambda\,E) = \det \begin{pmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{pmatrix} \\ =& (A-\lambda)\,(C-\lambda) - B^2 = \lambda^2 - (A+C)\,\lambda + A\,C - B^2 \end{aligned}$$

の解である．判別式は

$$(A+C)^2 - 4\,(A\,C - B^2) = (A-C)^2 + 4\,B^2 \geq 0$$

をみたすので，M の 2 つの固有値はすべて実数である．

(a) $A\,C - B^2 < 0$ のとき，M は負の固有値と正の固有値を 1 つずつもつ．

(b) $A\,C - B^2 > 0$ のとき，$A\,C > 0$ より A と C は同符号であるから，A と $A+C$ は同符号である．したがって，$A > 0$ かつ $A\,C - B^2 > 0$ のときには M は正の固有値を 2 つもち，$A < 0$ かつ $A\,C - B^2 > 0$ のときには M は負の固有値を 2 つもつ．■