解析学１　課題　解答例

2020.12.08

$\boxed{1}$　行列 A，B を

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

により定義するとき，(1) A については固有値と対応する固有ベクトルを求め，(2) B については固有値が実数であることを示せ．

(解) (1) A の特性方程式は

$$0=\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)\,(3-\lambda)-4=\lambda^2-4\,\lambda-1$$

であるから，固有値は

$$\lambda_-=2-\sqrt{5},\qquad \lambda_+=2+\sqrt{5}$$

である．$\nu\in\{-,+\}$ に対して，固有値 λ_ν に対応する固有ベクトル $(x_\nu,y_\nu)^T$ は

$$\mathbf{0}=(A-\lambda_\nu)\begin{pmatrix}x_\nu\\ y_\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-\lambda_\nu)\,x+2\,y_\nu\\ 2\,x+(3-\lambda_\nu)\,y_\nu\end{pmatrix}$$

の非自明な解であるから，$x_\nu=-2\,t$，$y_\nu=(1-\lambda_\nu)\,t$ （$t\neq 0$ は任意）と表される．したがって，固有値 λ_- および λ_+ に対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix}-2\\ -1+\sqrt{5}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}-2\\ -1-\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

である．

(2) B の特性方程式は

$$\begin{aligned}0=\Phi(\lambda)=\det(B-\lambda E)&=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 4-\lambda & 5\\ 3 & 5 & 6-\lambda\end{pmatrix}\\ &=(1-\lambda)\,(4-\lambda)\,(6-\lambda)+2\cdot 5\cdot 3+3\cdot 2\cdot 5-3\cdot 3\cdot(4-\lambda)\\ &\qquad -2\cdot 2\cdot(6-\lambda)-5\cdot 5\cdot(1-\lambda)=-\lambda^3+11\,\lambda^2+4\,\lambda-1\end{aligned}$$

であるから，B の固有値は重複を含めて 3 個ある．また，中間値の定理と

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\Phi(\lambda)=+\infty,\qquad \Phi(0)=-1,\qquad \Phi(11)=43,\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\Phi(\lambda)=-\infty$$

より B の固有値は区間 $(-\infty,0)$，$(0,11)$，$(11,+\infty)$ にそれぞれ 1 個ずつあり，B のすべての固有値は実数である．■