解析学 1　課題　解答例

2020.11.24

$\boxed{1}$　変換 $u = x + 2\,y$，$v = 2\,x - y$ に対するヤコビ行列 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ とその行列式 $\det \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ を求めよ．また，与えられた変換の逆変換に対するヤコビ行列を求め，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$$

が成り立つことを示せ.

(解) ヤコビ行列の定義より

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

が得られ，

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -5$$

である．また，逆変換は

$$x = \frac{u + 2\,v}{5}, \qquad y = \frac{2\,u - v}{5}$$

となるので，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$$

である．■