解析学１　課題　解答例

2020.11.17

$\boxed{1}$ 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

により定義するとき，$f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で全微分可能であるか否か調べよ．

(解) 前回の小テストにより

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

であることは分かっているので，

$$\varepsilon(x,y)=f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y=x\,y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

とおく．相加平均・相乗平均により

$$\left|\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{|x|^2+|y|^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

が得られ，$(x,y)\to(0,0)$ のとき

$$0\leq\left|\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\to 0$$

である．はさみうちの原理により

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

となるので，$f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で全微分可能である．■