解析学１　課題　解答例

2020.11.10

$\boxed{1}$ 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

により定義する.

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ における偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を求めよ.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ を求めよ.

(3) 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ が連続であるか否か調べよ.

(解) (1): $(x,y)\neq(0,0)$ においては，1 変数関数の合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\left[x\,y\sin(x^2+y^2)^{-1/2}\right]\\&=y\sin(x^2+y^2)^{-1/2}+x\,y\left[\left\{\cos(x^2+y^2)^{-1/2}\right\}\left\{-x\,(x^2+y^2)^{-3/2}\right\}\right]\\&=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2\,y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

となる.

(2): 偏微分係数の定義より

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

である.

(3): 問 (1) より $(x,y)\neq(0,0)$ において偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は連続であるから，$(x,y)=(0,0)$ における $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ の連続性を調べる．極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を用いると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)=r\sin\theta\sin\frac{1}{r}-\cos^2\theta\sin\theta\cos\frac{1}{r}$$

が得られ，$\theta=0$ ならば，任意の $r>0$ に対して $\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)=0$ であり，$\theta=\pi/6$ ならば，$r\to0$ のとき

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{r}{2}\sin\frac{1}{r}-\frac{3}{8}\cos\frac{1}{r}$$

は振動し収束しない．したがって，偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続ではない． ■