解析学１　課題　解答例

2020.10.27

$\boxed{1}$　関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

により定義する．

(1) 偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ を求めよ．

(2) $(a,b)\neq(0,0)$ に対する偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ を求めよ．

(解) (1): 関数 $f(x,y)$ と偏微分の定義に従って計算すると，$h\neq 0$ のとき $f(h,0)=0$, $f(0,h)=0$ であるから，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

となる．

(2): y を任意に固定して，x で微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\{y\,(3\,x^2-y^2)\}\cdot(x^2+y^2)-\{x\,y\,(x^2-y^2)\}\cdot(2\,x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y\,(x^4+4\,x^2\,y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

であり，x を任意に固定して，y で微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\{x\,(x^2-3\,y^2)\}\cdot(x^2+y^2)-\{x\,y\,(x^2-y^2)\}\cdot(2\,y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x\,(x^4-4\,x^2\,y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{b\,(a^4+4\,a^2\,b^2-b^4)}{(a^2+b^2)^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\frac{a\,(a^4-4\,a^2\,b^2-b^4)}{(a^2+b^2)^2}$$

となる．■