解析学１　課題　解答例

2020.10.20

$\boxed{1}$　次の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin(x\,y)}{x^2+y^2}$

(解) (1)，(2): $x\to 0$ のときには $x\neq 0$，$y\to 0$ のときには $y\neq 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+0}=\lim_{x\to 0}1=1,$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{0+y^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

である．

(3): $z\geq 0$ のとき，$-1\leq\cos z\leq 1$ より

$$-|z|=-z=\int_0^z(-1)\,dt\leq\int_0^z\cos t\,dt=\sin z\leq\int_0^z 1\,dt=z=|z|$$

である．同様に，$z\leq 0$ のとき

$$-|z|=z=\int_z^0(-1)\,dt\leq\int_z^0\cos t\,dt=-\sin z\leq\int_z^0 1\,dt=-z=|z|$$

が得られるので，すべての $z\in\mathbb{R}$ に対して $|\sin z|\leq|z|$ が成り立つ．$(x,y)\to(0,0)$ のとき

$$0\leq\left|\frac{x\sin(x\,y)}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x|\,|\sin(x\,y)|}{x^2+y^2}\leq\frac{|x|\,|x\,y|}{x^2+y^2}=|y|\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq|y|\to 0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin(x\,y)}{x^2+y^2}=0$$

となる．■