解析学１　課題　解答例

2020.10.13

$\boxed{1}$　$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$D = \{(x,y) : -1 \le x < 1,\ -1 < y \le 1\} = [-1,1) \times (-1,1]$$

について $\operatorname{Int} D$，∂D，$\operatorname{Cl} D$ を求めよ．

(解) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D_1，D_2，D_3 をそれぞれ

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) : \max(|x|,|y|) < 1\} = (-1,1) \times (-1,1), \\
D_2 &= \{(x,y) : \max(|x|,|y|) = 1\} = (\{-1,1\} \times [-1,1]) \cup ([-1,1] \times \{-1,1\}), \\
D_3 &= \{(x,y) : \max(|x|,|y|) > 1\} = \mathbb{R}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)
\end{aligned}$$

とする．明らかに

$$D_1 \subset D \subset (D_1 \cup D_2), \qquad D \cap D_3 = \varnothing$$

である．また，任意の $\varepsilon > 0$，$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対して $(a,b) \in U_\varepsilon(a,b)$ であるから，$(a,b) \in D_3$ ならば，内点の定義より $(a,b) \notin \operatorname{Int} D$ となる，つまり，$\operatorname{Int} D \subset D_1 \cup D_2$ である．(1) 任意に $(a,b) \in D_1$ を取り，

$$\varepsilon = \frac{1 - \max(|a|,|b|)}{2}$$

とおくと，$\max(|a|,|b|) < 1$ より $\varepsilon > 0$ である．任意の $(x,y) \in U_\varepsilon(a,b)$ に対して，

$$|x-a| \le \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon, \qquad |y-b| \le \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon$$

より

$$\begin{aligned}
|x| &= |a + (x-a)| \le |a| + |x-a| < |a| + \varepsilon \le |a| + \frac{1-|a|}{2} = \frac{1+|a|}{2} < 1, \\
|y| &= |b + (y-b)| \le |b| + |y-b| < |b| + \varepsilon \le |b| + \frac{1-|b|}{2} = \frac{1+|b|}{2} < 1
\end{aligned}$$

が得られ，$(x,y) \in D$ となるので，$U_\varepsilon(a,b) \subset D$ である．内点の定義より $(a,b) \in \operatorname{Int} D$ となり，$D_1 \subset \operatorname{Int} D$ である．(2) 任意に $\varepsilon > 0$，$(a,b) \in D_2$ を取り，

$$\hat{\varepsilon} = \min(\varepsilon, 1), \qquad x_\pm = a\left(1 \pm \frac{\hat{\varepsilon}}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right), \qquad y_\pm = b\left(1 \pm \frac{\hat{\varepsilon}}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

とおくと，

$$\sqrt{(x_\pm - a)^2 + (y_\pm - b)^2} = \frac{\hat{\varepsilon}}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

より $(x_\pm, y_\pm) \in U_\varepsilon(a,b)$ である．また，$\max(|a|,|b|) = 1$ より，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \le 1 - \frac{\hat{\varepsilon}}{2\sqrt{a^2+b^2}} < 1 < 1 + \frac{\hat{\varepsilon}}{2\sqrt{a^2+b^2}}, \\
&\max(|x_\pm|,|y_\pm|) = \left(1 \pm \frac{\hat{\varepsilon}}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)\max(|a|,|b|) = 1 \pm \frac{\hat{\varepsilon}}{2\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

が成り立つので，$(x_-, x_-) \in D_1 \subset D$，$(x_+, y_+) \in D_3 \subset (\mathbb{R}^2 \setminus D)$ である．したがって，$(a, b) \notin \operatorname{Int} D$ であり，$(a, b) \in \partial D$ である．つまり，$D_1 \cap \operatorname{Int} D = \varnothing$，$D_2 \subset \partial D$ が成り立つ．$\operatorname{Int} D \subset D_1$ であるから，(1) より $\operatorname{Int} D = D_1$ となる．(3) 任意に $(a, b) \in D_3$ を取り，

$$\varepsilon = \frac{\max(|a|, |b|) - 1}{2}$$

とおくと，$|a| > 1$ または $|b| > 1$ より $\varepsilon > 0$ であるから，任意の $(x, y) \in U_\varepsilon(a, b)$ に対して，(i) $|a| \geq |b|$ のときには

$$|x| = |a + (x - a)| \geq |a| - |x - a| > |a| - \varepsilon = |a| - \frac{|a| - 1}{2} = \frac{1 + |a|}{2} > 1$$

となり，(ii) $|a| \leq |b|$ のときには

$$|y| = |b + (y - b)| \geq |b| - |y - b| > |b| - \varepsilon = |b| - \frac{|b| - 1}{2} = \frac{1 + |b|}{2} > 1$$

となるので，$\max(|x|, |y|) > 1$，つまり，$(x, y) \in D_3$ が得られる．したがって，$(a, b) \notin \partial D$ である．以上から，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Int} D &= D_1 = (-1, 1) \times (-1, 1), \\
\partial D &= D_2 = (\{-1, 1\} \times [-1, 1]) \cup ([-1, 1] \times \{-1, 1\}), \\
\operatorname{Cl} D &= D_1 \cup D_2 = [-1, 1] \times [-1, 1]
\end{aligned}$$

である．■