解析学１　解答例

2020.01.21

■　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq n^2\}$ とおくとき，極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

を求めよ．

（解） 極座標変換 $x = r\,\cos\theta$，$y = r\,\sin\theta$ を用いる．このとき，

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\sin\theta \\ \sin\theta & r\,\cos\theta \end{vmatrix} = r \geq 0$$

である．$E_n = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq n,\ 0 \leq \theta \leq 2\,\pi\}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy &= \iint_{E_n} e^{-r^2}\,|\,J\,|\, dr\, d\theta = \int_0^{2\,\pi} \left(\int_0^n e^{-r^2}\, r\, dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\,\pi} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r=n} d\theta = \int_0^{2\,\pi} \frac{1-e^{-n^2}}{2}\, d\theta = \pi\,(1-e^{-n^2})\end{aligned}$$

により

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \left\{ \pi\,(1-e^{-n^2}) \right\} = \pi$$

となる．■