解析学１　解答例

2020.01.07

■　$a>0$，$\theta\in(0,\pi/2]$ とする．2 つの円柱

$$C_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2+z^2\le a^2\},\qquad C_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x\,\sin\theta+y\,\cos\theta)^2+z^2\le a^2\}$$

の共通部分 $C_1\cap C_2$ の体積 V を求めよ．

（解） $y=a$ と $x\,\sin\theta+y\,\cos\theta=\pm a$ の交点を $\mathrm{P}_\pm$，$y=-a$ と $x\,\sin\theta+y\,\cos\theta=\pm a$ の交点を $\mathrm{Q}_\pm$ とすると，$\mathrm{P}_\pm$ および $\mathrm{Q}_\pm$ の座標はそれぞれ

$$\left(-\frac{a\,(\cos\theta\mp 1)}{\sin\theta},a\right),\qquad \left(\frac{a\,(\cos\theta\pm 1)}{\sin\theta},-a\right)$$

となる．P_- と Q_+，P_+ と Q_- は原点 O に関して点対称な位置にあり，四角形 $\mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{Q}_-\mathrm{P}_-$ は菱形である．また，

$$\alpha_-=\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}=-\cot\frac{\theta}{2},\qquad \alpha_+=\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$$

であることに注意したい．D を

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \alpha_-\,y\le x\le\alpha_+\,y,\ 0\le y\le a\right\}$$

により定義すると，体積を求める図形の対称性により

$$\begin{aligned}
V=&8\iint_D\sqrt{a^2-y^2}\,dx\,dy=8\int_0^a\left(\int_{\alpha_-\,y}^{\alpha_+\,y}\sqrt{a^2-y^2}\,dx\right)dy\\
=&8\,(\alpha_+-\alpha_-)\int_0^a y\,\sqrt{a^2-y^2}\,dy=8\,(\alpha_+-\alpha_-)\left[-\frac{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^a\\
=&\frac{8\,a^3}{3}\left(\tan\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}\right)=\frac{16\,a^3}{3\,\sin\theta}
\end{aligned}$$

となる．■