解析学１　解答例

2019.12.24

■　$a>0$ とする．2 つの円柱

$$C_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2\le a^2\},\qquad C_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2+z^2\le a^2\}$$

の共通部分 $C_1\cap C_2$ の体積 V を求めよ．

（解）解答例 1 ：　平面 $z=t\in[-a,a]$ に対する切り口 $D(t)$ は

$$D(t)=[-\sqrt{a^2-t^2},\sqrt{a^2-t^2}]\times[-\sqrt{a^2-t^2},\sqrt{a^2-t^2}]$$

であるから，$D(t)$ の面積 $S(t)$ は $S(t)=4\,(a^2-t^2)$ であるから，

$$V=\int_{-a}^{a}S(t)\,dt=\int_{-a}^{a}4\,(a^2-t^2)\,dt=4\left[a^2\,t-\frac{t^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{16\,a^3}{3}$$

となる．

解答例 2 ：　$C_1\cap C_2$ は平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=y$ それぞれに関して対称であるから，

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y\le x\le a,\ 0\le z\le\sqrt{a^2-x^2}\}$$

の体積を求めて 16 倍すれば良い．

$$f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2},\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\le a\}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}V=&16\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=16\int_0^a\left(\int_0^x\sqrt{a^2-x^2}\,dy\right)dx\\=&16\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=16\left[-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^a=\frac{16\,a^3}{3}\end{aligned}$$

となる．■