解析学 1　解答例

2019.12.10

■　条件 $g(x,y)=x^2+x\,y+y^2-3=0$ のもとでの関数 $f(x,y)=x\,y$ の最小値と最大値を調べよ．

（解） $h(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\,g(x,y)$ とおくと，求める値を取る候補者 (x,y) は

$$0=\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,\lambda)=y+\lambda\,(2\,x+y), \tag{E1}$$

$$0=\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,\lambda)=x+\lambda\,(2\,y+x), \tag{E2}$$

$$0=\frac{\partial h}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=x^2+x\,y+y^2-3 \tag{E3}$$

の解である．(E1)，(E2) より

$$\begin{pmatrix} 2\,\lambda & 1+\lambda \\ 1+\lambda & 2\,\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られる．ここで，

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2\,\lambda & 1+\lambda \\ 1+\lambda & 2\,\lambda \end{vmatrix}=(2\,\lambda)^2-(1+\lambda)^2=3\,\lambda^2-2\,\lambda-1=(3\,\lambda+1)\,(\lambda-1)$$

とおく．$\Delta\neq 0$ の場合には，$(x,y)=(0,0)$ となり，(E3) をみたさないので，$\Delta=0$，つまり，$\lambda=1$ または $\lambda=-1/3$ である．(a) $\lambda=1$ のとき，$x=-y$ であるから，(E3) より $x=-y=\pm\sqrt{3}$ が得られ，(b) $\lambda=-1/3$ のとき，$x=y$ であるから，(E3) より $x=y=\pm 1$ が得られる．したがって，連立方程式 (E1)，(E2)，(E3) の解は

$$(x,y,\lambda)=(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3},1),\quad (\pm 1,\pm 1,-1/3)\qquad \text{（複合同順）}$$

である．

$$f(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})=-3,\qquad f(\pm 1,\pm 1)=1$$

より，$f(x,y)$ は $(x,y)=(\pm 1,\pm 1)$ で最大値 1，$(x,y)=(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})$ で最小値 -3 を取る．■