解析学１　解答例

2019.12.03

■　半径 r の円に内接する三角形のうち，面積が最大のものを求めよ．

(解) 半径 r の円に内接する △ABC において辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ x，y，z とする．$x+y+z=\pi$ より，変数 x，y の動く領域 D は

$$D = \{\,(x,y) \,:\, x>0,\, y>0,\, x+y<\pi\,\}$$

である．正弦定理

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin y} = \frac{c}{\sin z} = 2\,r$$

より，△ABC の面積 $f(x,y)$ は

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \frac{a\,b\,\sin z}{2} = 2\,r^2\,\sin x\,\sin y\,\sin(\pi-x-y) \\ =& 2\,r^2\,\sin x\,\sin y\,\sin(x+y) = \frac{r^2}{2}\,\{\sin 2\,x + \sin 2\,y - \sin(2\,x+2\,y)\} \end{aligned}$$

となる．ここで，すべての $(x,y)\in\partial D$ に対して $f(x,y)=0$ であることに注意したい．$(x,y)\in D$ と

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =& r^2\,\{\cos 2\,x - \cos(2\,x+2\,y)\} = 2\,r^2\,\sin y\,\sin(2\,x+y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =& r^2\,\{\cos 2\,y - \cos(2\,x+2\,y)\} = 2\,r^2\,\sin x\,\sin(x+2\,y) \end{aligned}$$

より，$f(x,y)$ が極値を取る点の候補は連立方程式

$$\sin(2\,x+y)=0, \qquad \sin(x+2\,y)=0, \qquad \text{つまり，}\quad 2\,x+y=\pi, \qquad x+2\,y=\pi$$

の解 $(x,y)=(\pi/3,\pi/3)$ である．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4\,r^2\,\sin y\,\cos(2\,x+y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4\,r^2\,\sin x\,\cos(x+2\,y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[r^2\,\{\cos 2\,x - \cos(2\,x+2\,y)\}] = 2\,r^2\,\sin(2\,x+2\,y)$$

より

$$\begin{aligned} A =& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pi/3,\pi/3) = -2\,\sqrt{3}\,r^2 < 0, \\ B =& \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\pi/3,\pi/3) = -\sqrt{3}\,r^2, \\ C =& \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pi/3,\pi/3) = -2\,\sqrt{3}\,r^2 \end{aligned}$$

であり，$AC-B^2 = 9\,r^4 > 0$ となる．したがって，$f(x,y)$ は $(x,y)=(\pi/3,\pi/3)$ で最大値を取るので，△ABC は正三角形である．■