解析学１　解答例

2019.11.05

■ 関数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,y\,\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

に対して，(1) 点 $(0,0)$ で連続であるか否か，(2) 偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ が存在するか否か，(3) 点 $(0,0)$ で全微分可能か否かを調べよ．

（解） (1) 極座標 $x=r\,\cos\theta$，$y=r\,\sin\theta$ を用いると，θ に無関係に

$$0\leq|\,f(r\,\cos\theta,r\,\sin\theta)\,|=\left|r^2\,\sin\theta\,\cos\theta\,\sin\frac{1}{r}\right|\leq r^2\to 0\quad(r\to+0)$$

が成り立つので，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$$

である．したがって，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続である．(2) 点 $(0,0)$ での偏微分係数を計算すると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

となる．(3) 剰余項 $\varepsilon(x,y)$ を

$$\varepsilon(x,y)=f(x,y)-\left\{f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,(y-0)\right\}=x\,y\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

とおく．極座標 $x=r\,\cos\theta$，$y=r\,\sin\theta$ を用いると，θ に無関係に

$$0\leq\left|\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}\right|=\left|\frac{r^2\,\sin\theta\,\cos\theta}{r}\,\sin\frac{1}{r}\right|\leq r\to0\quad(r\to0)$$

が成り立つので，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0$$

である．したがって，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ において全微分可能である．■