解析学１　解答例

2019.10.08

■　極限

$$(1)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^2\,y+y^2}{x^2+x\,y+y^2} \qquad\qquad (2)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\sin(x\,y)}{x^2+y^2}$$

を調べよ．

（解） (1) $f(x,y)=\dfrac{x^4+x^2\,y+y^2}{x^2+x\,y+y^2}$ とおく．x 軸上で点 (x,y) を $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{x\to0} f(x,0)=\lim_{x\to0} x^2=0$$

となり，y 軸上で点 (x,y) を $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{y\to0} f(0,y)=\lim_{y\to0} 1=1$$

となる．したがって，近づけ方によって極限が異なるので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^2\,y+y^2}{x^2+x\,y+y^2}$ は存在しない．

(2) $(x,y)\to(0,0)$ のとき $z=x\,y\to0$ であるから，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x\,y)}{x\,y}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=1$$

が成り立ち，

$$\frac{x\,\sin(x\,y)}{x^2+y^2}=\frac{x^2\,y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\sin(x\,y)}{x\,y}$$

と表されるので，$g(x,y)=\dfrac{x^2\,y}{x^2+y^2}$ に対する極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ を調べればよい．極座標 $x=r\,\cos\theta$，$y=r\,\sin\theta$ を用いると，

$$g(x,y)=g(r\,\cos\theta,r\,\sin\theta)=r\,\cos^2\theta\,\sin\theta$$

が得られる．$(x,y)\to(0,0)$ のとき $r\to+0$ であるから，

$$\lim_{r\to+0} g(r\,\cos\theta,r\,\sin\theta)=\lim_{r\to+0}(r\,\cos^2\theta\,\sin\theta)=0$$

となり，上記極限は近づける方向 θ に依存せず 0 に収束することを意味する，つまり，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$ である．したがって，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\sin(x\,y)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left\{\frac{x^2\,y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\sin(x\,y)}{x\,y}\right\}=0\cdot1=0$$

となる．■