解析学 1　解答例

2019.10.01

■　任意の θ （$0 < |\,\theta\,| < \pi/4$）に対して

$$\frac{\tan\theta}{2} = \frac{1}{2\,\tan\theta} - \frac{1}{\tan 2\,\theta}$$

が成り立つことを示し，無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\tan\frac{x}{2^n} \qquad \left(0 < |\,x\,| < \frac{\pi}{2}\right)$$

の収束・発散を調べよ．

（解） $0 < |\,\theta\,| < \pi/4$ のとき $0 < |\,\tan\theta\,| < 1$ であることに注意したい．$\tan\theta$ の加法定理より

$$\frac{1}{2\,\tan\theta} - \frac{1}{\tan 2\,\theta} = \frac{1}{2\,\tan\theta} - \frac{1}{\dfrac{2\,\tan\theta}{1-\tan^2\theta}} = \frac{\tan\theta}{2}$$

が得られる．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < |\,2^{-n}\,x\,| < \pi/4$ であるから，

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\,\tan\frac{x}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}\left\{\frac{1}{2\,\tan(2^{-k}\,x)} - \frac{1}{\tan(2^{-(k-1)}\,x)}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\,\tan(2^{-k}\,x)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}\,\tan(2^{-(k-1)}\,x)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\,\tan(2^{-k}\,x)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k\,\tan(2^{-k}\,x)} = \frac{1}{2^n\,\tan(2^{-n}\,x)} - \frac{1}{\tan x}
\end{aligned}$$

となる．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n\,\tan(2^{-n}\,x)} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\cos(2^{-n}\,x)}{x}\cdot\frac{2^{-n}\,x}{\sin(2^{-n}\,x)}\right\} = \frac{1}{x}$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\tan\frac{x}{2^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$$

である．■