解析学１　解答例

2019.01.22

■　$D = [0,1] \times [0,1]$ とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $E_n = [0, 1/n) \times [0, 1/n)$，$D_n = D \setminus E_n$ とする．このとき，極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy$$

を求めることにより広義積分

$$\iint_D \frac{1}{x+y}\, dx\, dy$$

を計算せよ．

（解） $D_n^L = \{\, (x,y) \in D_n \mid x \le y \,\}$，$D_n^R = \{\, (x,y) \in D_n \mid x \ge y \,\}$ とおくと，$D_n = D_n^L \cup D_n^R$ である．累次積分により

$$\iint_{D_n^L} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy = \int_{1/n}^1 \left(\int_0^y \frac{1}{x+y}\, dx \right) dy = \int_{1/n}^1 \left[\log|\, x+y \,| \right]_0^y \, dy = \int_{1/n}^1 \log 2\, dy = \frac{n-1}{n}\, \log 2,$$

$$\iint_{D_n^R} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy = \int_{1/n}^1 \left(\int_0^x \frac{1}{x+y}\, dy \right) dx = \int_{1/n}^1 \left[\log|\, x+y \,| \right]_0^x \, dx = \int_{1/n}^1 \log 2\, dx = \frac{n-1}{n}\, \log 2$$

が得られるので，

$$\iint_D \frac{1}{x+y}\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \left(\iint_{D_n^L} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy + \iint_{D_n^R} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,(n-1)\, \log 2}{n} = 2\, \log 2$$

となる．

別解　$D_n^L = [0, 1/n] \times [1/n, 1]$，$D_n^R = [1/n, 1] \times [0, 1]$ とおくと，$D_n = D_n^L \cup D_n^R$ である．任意の定数 a に対して

$$\frac{d}{dx} \left[(x+a)\, \log(x+a) - x\, \log x \right] = \log(x+a) - \log x$$

が成り立つことに注意し，累次積分を用いると，

$$\begin{aligned}
\iint_{D_n^L} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy &= \int_{1/n}^1 \left(\int_0^{1/n} \frac{1}{x+y}\, dx \right) dy = \int_{1/n}^1 \left[\log|\, x+y \,| \right]_0^{1/n} \, dy \\
&= \int_{1/n}^1 \left\{ \log\left(y + \frac{1}{n} \right) - \log y \right\} dy = \left[\left(y + \frac{1}{n} \right) \log\left(y + \frac{1}{n} \right) - y\, \log y \right]_{1/n}^1 \\
&= \log \frac{n+1}{n} + \frac{\log(n+1) - 2\, \log 2}{n}, \\
\iint_{D_n^R} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy &= \int_{1/n}^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y}\, dy \right) dx = \int_{1/n}^1 \left[\log|\, x+y \,| \right]_0^1 \, dx = \int_{1/n}^1 \left\{ \log(x+1) - \log x \right\} dx \\
&= \left[(x+1)\, \log(x+1) - x\, \log x \right]_{1/n}^1 = 2\, \log 2 - \log \frac{n+1}{n} - \frac{\log(n+1)}{n}
\end{aligned}$$

となり，

$$\iint_{D_n} \frac{1}{x+y}\,dx\,dy = \iint_{D_n^L} \frac{1}{x+y}\,dx\,dy + \iint_{D_n^R} \frac{1}{x+y}\,dx\,dy = \left(1-\frac{1}{n}\right)\,2\,\log 2$$

が得られる．したがって，

$$\iint_{D} \frac{1}{x+y}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{1}{x+y}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\,2\,\log 2\right\} = 2\,\log 2$$

となる． ■