解析学１　解答例

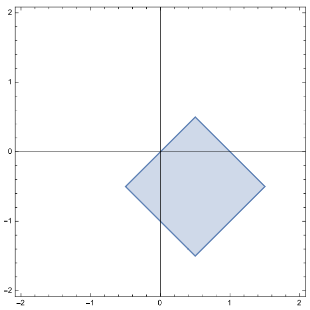
2019.01.15

■　$D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x+y \leq 1,\ 0 \leq x-y \leq 2\,\}$ とするとき，重積分

$$\iint_D x^2\,dx\,dy$$

を求めよ．

（解）　閉領域 D は下図のようになる．



変数変換 $u = x+y$，$v = x-y$ を用いると，$x = (u+v)/2$，$y = (u-v)/2$ であるから，ヤコビアンは

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\int_0^2 \frac{(u+v)^2}{4}\ \left|-\frac{1}{2}\right|\,dv\,du = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[\frac{(u+v)^3}{3}\right]_0^2 du \\
&= \frac{1}{12}\int_{-1}^{1}(3\,u^2+6\,u+4)\,du = \frac{1}{12}\ \left[u^3+3\,u^2+4\,u\right]_{-1}^{1} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

となる．また，y で積分し，その後で x で積分する累次積分は

$$\begin{aligned}
\iint_D x\,dx\,dy &= \int_{-1/2}^{1/2}\left(\int_{-1-x}^{x} x^2\,dy\right)dx + \int_{1/2}^{3/2}\left(\int_{x-2}^{1-x} x^2\,dy\right)dx \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} x^2\,(2\,x+1)\,dx + \int_{1/2}^{3/2} x^2\,(3-2\,x)\,dx \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} x^2\,(2\,x+1)\,dx + \int_{-1/2}^{1/2}(z+1)^2\,(1-2\,z)\,dz \\
&= \int_{-1/2}^{1/2}(1-2\,x^2)\,dx = \left[x - \frac{2\,x^3}{3}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

となる．■