解析学１　解答例

2019.01.08

■　$D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\,\}$ とするとき，累次積分を用いて，重積分

$$\iint_D x\,dx\,dy$$

を求めよ．

（解） x で積分し，その後で y で積分する累次積分は

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_{-1}^{1} 0\,dy = 0$$

となる．また，y で積分し，その後で x で積分する累次積分は

$$\begin{aligned} \iint_D x\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy \right) dx = \int_{-1}^{1} [x\,y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2\,x\,\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[-\frac{2\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{-1}^{1} = 0 \end{aligned}$$

となる．■