解析学１　解答例

2018.12.18

■　$D = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le x \le 1\,\}$ とするとき，累次積分を用いて，重積分

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

を求めよ．

（解） x で積分し，その後で y で積分する累次積分は

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left\{ \int_y^1 (x^2 + y^2)\,dx \right\} dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + x\,y^2 \right]_y^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 - \frac{4\,x^3}{3} \right) dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる．また，y で積分し，その後で x で積分する累次積分は

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x (x^2 + y^2)\,dy \right\} dx = \int_0^1 \left[x^2\,y + \frac{y^3}{3} \right]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{4\,x^3}{3}\,dx = \left[\frac{x^4}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる．■