解析学１　解答例

2018.12.11

■　関数 $f(x,y)$ は 2 回連続微分可能であるとし，$y=g(x)$ を $f(x,y)=0$ により定められる陰関数とする．$g(x)$ が $x=a$ で極大値 $b=g(a)$ を取るとき，$g(x)$ がみたす条件を調べよ．

（解）$x=a$ のまわりで $f(x,g(x))=0$ であるから，微分すると

$$
\begin{aligned}
0=\frac{d}{dx}\left[f(x,g(x))\right]=&\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))\,\frac{dg}{dx}(x),\\
0=\frac{d^2}{dx^2}\left[f(x,g(x))\right]=&\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))\,\frac{dg}{dx}(x)\right]\\
=&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,g(x))+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,g(x))\,\frac{dg}{dx}(x)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))\,\frac{d^2 g}{dx^2}(x)\\
&+\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,g(x))+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,g(x))\,\frac{dg}{dx}(x)\right\}\frac{dg}{dx}(x)
\end{aligned}
$$

となる．$g(x)$ は $x=a$ で極大値をとるので，$\dfrac{dg}{dx}(a)=0$ より条件

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0,\qquad \frac{d^2 g}{dx^2}(a)=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}<0
$$

が得られる．■