解析学１　解答例

2018.12.04

■　次の行列の固有値を求めよ．

$$
(1)\ A=\begin{pmatrix}3&1&1&2\\0&2&3&4\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix},\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix}3&1&1&2\\1&2&3&4\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}
$$

（解） (1) 第 1 列で展開することにより，特性多項式は

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda E-A)=&\det\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&-1&-2\\0&\lambda-2&-3&-4\\0&0&\lambda+2&-1\\0&0&0&\lambda+2\end{pmatrix}\\
=&(\lambda-3)\,(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-3&-4\\0&\lambda+2&-1\\0&0&\lambda+2\end{pmatrix}=(\lambda-3)\,(\lambda-2)\,(\lambda+2)^2
\end{aligned}
$$

と表せるので，A の固有値は 3，2，-2，-2 である．

(2) 第 1 列で展開することにより，特性多項式は

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda E-A)=&\det\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&-1&-2\\-1&\lambda-2&-3&-4\\0&0&\lambda+2&-1\\0&0&0&\lambda+2\end{pmatrix}\\
=&(\lambda-3)\,(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-3&-4\\0&\lambda+2&-1\\0&0&\lambda+2\end{pmatrix}\\
&+(-1)\,(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\0&\lambda+2&-1\\0&0&\lambda+2\end{pmatrix}\\
=&(\lambda-3)\,(\lambda-2)\,(\lambda+2)^2-(\lambda+2)^2=(\lambda^2-5\,\lambda+5)\,(\lambda+2)^2
\end{aligned}
$$

と表せるので，A の固有値は

$$
\frac{5-\sqrt{5}}{2},\qquad \frac{5+\sqrt{5}}{2},\qquad -2,\qquad -2
$$

である．■