解析学１　解答例

2018.11.27

■　行列

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad (2)\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値が実数であるかどうかを調べよ．ただし，a，b，c は実数とする．

（解） (1) 固有方程式

$$0=\det(\lambda E-A)=\det\begin{pmatrix} \lambda-a & -b \\ -b & \lambda-c \end{pmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-c)-b^2=\lambda^2-(a+c)\lambda+a\,c-b^2$$

の判別式 D は

$$D=(a+c)^2-4\,(a\,c-b^2)=(a-c)^2+4\,b^2\geq 0$$

であるから，A のすべての固有値は実数である．(2) 固有方程式は

$$\begin{aligned} 0=\det(\lambda E-A)=&\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -2 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \\ =&\lambda^3+(-1)^2\,(-2)+(-2)\,(-1)^2-(-2)^2\,\lambda-(-1)^2\,\lambda-(-1)^2\,\lambda \\ =&\lambda^3-6\,\lambda-4=(\lambda+2)\,(\lambda-1+\sqrt{3})\,(\lambda-1-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

であるから，A のすべての固有値は実数である．■