解析学１　解答例

2018.11.06

■　次の問いに答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\,\cos\theta$，$y = r\,\sin\theta$ を全微分して得られる 1 次微分形式

$$dx = \cos\theta\,dr - r\,\sin\theta\,d\theta, \qquad dy = \sin\theta\,dr + r\,\cos\theta\,d\theta$$

に対して，2 次微分形式

$$dx \wedge dy = (\cos\theta\,dr - r\,\sin\theta\,d\theta) \wedge (\sin\theta\,dr + r\,\cos\theta\,d\theta)$$

を簡単にせよ．

(2) 異なる 3 点 $(0,0)$，(a,c)，(b,d) を頂点とする三角形の面積を求めよ．

（解） (1) 関係式 $dr \wedge dr = 0$，$d\theta \wedge d\theta = 0$，$d\theta \wedge dr = -dr \wedge d\theta$ より

$$\begin{aligned} dx \wedge dy =& \cos\theta\,\sin\theta\,dr \wedge dr - r\,\sin^2\theta\,d\theta \wedge dr + r\,\cos^2\theta\,dr\,d\theta - r^2\,\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta \wedge d\theta \\ =& r\,\sin^2\theta\,dr \wedge d\theta + r\,\cos^2\theta\,dr\,d\theta = r\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,dr \wedge d\theta = r\,dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

となる．(2) $\boldsymbol{a} = (a,c)^T$，$\boldsymbol{b} = (b,d)^T$ とおくと，求める面積 S はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積の半分である．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ （$0 \le \theta \le \pi$）とすると，

$$S = \frac{\|\,\boldsymbol{a}\,\|\,\|\,\boldsymbol{b}\,\|\,\sin\theta}{2} = \frac{\sqrt{\|\,\boldsymbol{a}\,\|^2\,\|\,\boldsymbol{b}\,\|^2\,(1-\cos^2\theta)}}{2} = \frac{\sqrt{\|\,\boldsymbol{a}\,\|^2\,\|\,\boldsymbol{b}\,\|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{2}$$

と表せ，

$$\|\,\boldsymbol{a}\,\|^2\,\|\,\boldsymbol{b}\,\|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = (a^2+c^2)\,(b^2+d^2) - (a\,b + c\,d)^2 = (a\,d - b\,c)^2$$

より

$$S = \frac{\sqrt{(a\,d-b\,c)^2}}{2} = \frac{|\,a\,d - b\,c\,|}{2} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$$

となる．■