解析学１　解答例

2018.10.30

■　関数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,y\,\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

に対して点 $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能かどうかを調べよ．

（解） 点 $(x,y)=(0,0)$ での偏微分係数を計算すると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

であるから，剰余項 $\varepsilon(x,y)$ を

$$\varepsilon(x,y)=f(x,y)-\left\{f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,(y-0)\right\}=x\,y\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

とおく．極座標 $x=r\,\cos\theta$，$y=r\,\sin\theta$ を用いると，θ に無関係に

$$\left|\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}\right|=\left|\frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\left|\frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$
$$=r\,\left|\sin\theta\,\cos\theta\right|\leq r\to 0\quad(r\to 0)$$

が成り立つので，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0$$

である．したがって，$f(x,y)$ は点 $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能である．■