解析学１　解答例

2018.10.16

■　自然数 $k \geq 2$ に対して，極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^k}{x^2+y^2}$$

を調べよ．

（解）　極座標 $x = r\,\cos\theta$，$y = r\,\sin\theta$ を用いると，

$$\frac{x^k}{x^2+y^2} = \frac{r^k\,\cos^k\theta}{r^2\,\cos^2\theta + r^2\,\sin^2\theta} = r^{k-2}\,\cos^k\theta$$

となる．$(x,y)\to(0,0)$ のとき $r\to+0$ であるから，

$$\lim_{r\to+0}(r^{k-2}\,\cos^k\theta) = \begin{cases} \cos^2\theta & (k=2) \\ 0 & (k\geq 3) \end{cases}$$

より $k\geq 3$ のときには上記極限は近づける方向 θ に依存せず 0 に収束する．したがって，$k\geq 3$ の場合には

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^k}{x^2+y^2} = 0$$

である．$k=2$ の場合には，$\theta=0$（x 軸沿って $(0,0)$ に近づける）のとき極限値は 1 であるが，$\theta=\pi/2$（y 軸沿って $(0,0)$ に近づける）のとき極限値は 0 であるから，$(0,0)$ に近づける方向に依存した極限値が定まるので，与えられた極限は存在しない．■