解析学１　解答例

2018.10.02

■ $D = \{\, (x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 1 \,\}$ が開集合であることを確認せよ．

（解） 任意に $\boldsymbol{a} = (a, b) \in D$ を取る．$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ならば，$\varepsilon = 1/2$ とおくと $U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset D$ であるから，$\boldsymbol{a}$ は D の内点である．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ の場合を考える．このとき，$0 < \|\, \boldsymbol{a} \,\| < 1$ であることに注意したい．

$$\varepsilon = \frac{\min(\|\, \boldsymbol{a} \,\|, 1 - \|\, \boldsymbol{a} \,\|)}{2}$$

とおくと，$\varepsilon > 0$ である．任意の $\boldsymbol{x} \in U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ に対して

$$\|\, \boldsymbol{x} \,\| = \|\, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \,\| \leq \|\, \boldsymbol{a} \,\| + \|\, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \,\| < \|\, \boldsymbol{a} \,\| + \varepsilon \leq \|\, \boldsymbol{a} \,\| + \frac{1 - \|\, \boldsymbol{a} \,\|}{2} = \frac{1 + \|\, \boldsymbol{a} \,\|}{2} < 1$$

より $\boldsymbol{x} \in D$ となるので，$U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset D$ である．したがって，$\boldsymbol{a}$ は D の内点である．以上から，$D \subset \operatorname{Int} D$ である．一般に $\operatorname{Int} D \subset D$ が成り立つので，$D = \operatorname{Int} D$ となる．開集合の定義より，D は開集合である．■