解析学１　解答例

2017.12.15

■　原点以外の点において 2 変数関数 $f(x,y)$，$g(x,y)$，$h(x,y)$ を

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) = \frac{x^2\,y^2}{x^2+y^2}, \qquad h(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^2}$$

で定めるとき，それぞれの関数について，原点での値を適当に定めて，原点において連続に延ばせるかどうか調べよ．

（解）　極座標 $x = r\,\cos\theta$，$y = r\,\sin\theta$ （$r > 0$，$0 \leq \theta \leq 2\pi$）を用いると，$r^2 = x^2 + y^2$ より

$$\begin{aligned} f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) &= \cos\theta\,\sin\theta, \\ g(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) &= r^2\,\cos^2\theta\,\sin^2\theta, \\ h(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) &= r\,\cos\theta\,\sin^2\theta \end{aligned}$$

と表せるので，$f(x,y)$ については θ に依存した極限

$$\lim_{r\to+0} f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) = \cos\theta\,\sin\theta$$

となるが，$g(x,y)$ と $h(x,y)$ については θ に依存しない極限

$$\lim_{r\to+0} g(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) = 0, \qquad \lim_{r\to+0} h(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) = 0$$

になる．したがって，$f(x,y)$ については，原点において連続に延ばせるように，原点での値を適当に定めることができないが，$g(x,y)$ と $h(x,y)$ については，原点での値を 0 と定めると，原点において連続に延ばせる．■