解析学１　解答例

2017.12.08

■　$p > 0$ とするとき，定義に従って，関数 $f(x) = p\,x^2$ は各点 $x = a \in \mathbb{R}$ で連続であることを示せ．

（解）$0 < \delta < 1$ に対して，$x \in U_\delta(a)$，つまり，$|\,x - a\,| < \delta$ のときには

$$|\,x\,| = |\,(x-a) + a\,| \leq |\,x - a\,| + |\,a\,| < \delta + |\,a\,| < 1 + |\,a\,|$$

が成り立つことに注意したい．任意に $\varepsilon > 0$ を取り，

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2\,p\,(1 + 2\,|\,a\,|)}\right\}$$

とおくと，$0 < \delta < 1$ であるから，すべての $x \in U_\delta(a)$ に対して

$$\begin{aligned}|\,f(x) - f(a)\,| &= |\,p\,(x+a)\,(x-a)\,| = p\,|\,x+a\,|\,|\,x-a\,| \leq p\,(|\,x\,| + |\,a\,|)\,|\,x-a\,| \\ &< p\,\{(1 + |\,a\,|) + |\,a\,|\}\,\delta = p\,(1 + 2\,|\,a\,|)\,\delta \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\end{aligned}$$

つまり，$f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ が得られる．したがって，$f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$ が成り立つので，$f(x)$ は各点 $x = a$ で連続である．■