解析学１　解答例

2017.12.01

■　$A = (0, 1]$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $a \in (0, 1)$ は A の内点であることを示せ．

(2) $a = 0$ および $a = 1$ が A の内点であるかどうか調べよ．

（解） (1)： $\varepsilon > 0$ を

$$\varepsilon = \frac{\min(a, 1-a)}{2}$$

とすると，$\varepsilon \leq a/2$，$\varepsilon \leq (1-a)/2$ より

$$0 < \frac{a}{2} = a - \frac{a}{2} \leq a - \varepsilon < a < a + \varepsilon \leq a + \frac{1-a}{2} = \frac{1+a}{2} < 1$$

となり，$U_\varepsilon(a) \subset A$ が成り立つ．したがって，a は A の内点である．

(2)： 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$-\frac{\varepsilon}{2} \notin A, \qquad -\frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon); \qquad 1 + \frac{\varepsilon}{2} \notin A, \qquad 1 + \frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

であるから，$U_\varepsilon(0) \not\subset A$，$U_\varepsilon(1) \not\subset A$ となる．したがって，$a = 0$ と $a = 1$ は A の内点ではない． ■